TUTORATO ALGEBRA LINEARE - 23/06/25

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi reali di grado ≤ 3.

(1) Per quali valori del parametro a si ha
$$4x^3 + ax^2 + 2x + 1 \in \mathrm{Span}(x^3+1, x^3+x, x+1)\,?$$

(2) Sia $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare determinata da
$$\phi(1) = x^3+1,\ \phi(x) = x^3+x,\ \phi(x^2) = x+1,\ \phi(x^3) = 4x^3+ax^2+2x+1.$$
Per quali valori del parametro a si ha $\dim\ker(\phi) = 1$?

Soluzione

Innanzitutto convertiamo il problema: polinomi $\longleftrightarrow$ vettori

$$1, x, x^2, x^3 \longleftrightarrow e_1, e_2, e_3, e_4$$

base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ — base (canonica) di $\mathbb{R}^4$

$$x^3+1 \longleftrightarrow e_1+e_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$x^3+x \longleftrightarrow e_2+e_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$x+1 \longleftrightarrow e_1+e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(1) I tre polinomi ($\longleftrightarrow$ vettori) sono lin. indip.:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-R_1} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-R_2} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$4x^3+ax^2+2x+1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\a\\4\end{pmatrix}$$

$\in$ Span (primi tre) $\iff$ la matrice $A = \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&a\\1&1&0&4\end{pmatrix}$ ha rango 3

$\iff$ la matrice non è invertibile ($\mathrm{rk}(A) < 4$)

i primi 3 sono lin. indip $\Rightarrow \mathrm{rk}(A) \geq 3$

Due strade: Gauss (operazioni elementari) oppure $\det(A)=0$

GAUSS)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

3 PIVOT $\Updownarrow$ $a=0$

det)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = 2a$$

Come prima: $a=0$.

(2) Nella base $\mathcal{B}=\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, l'applicazione ϕ si scrive come:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \left([\phi(1)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\phi(x)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\phi(x^2)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [\phi(x^3)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \left([x^3+1]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [x^3+x]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [x+1]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [4x^3+ax^2+2x+1]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ (la stessa del punto (1))

$$\mathrm{rk}(A) = \begin{cases} 3 & , a=0 \\ 4 & , a\neq 0 \end{cases},$$

$$\dim(\ker\phi) = 4 - \mathrm{rk}(A) = \begin{cases} 1 & , \boxed{a=0} \\ 0 & , a\neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]$ di grado ≤ 4 e sia $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix}.$$

dove si ricorda che $f' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$ e $f'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2$.

(1) Quali tra gli elementi della base standard

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^3$ sono contenuti nell'immagine di ϕ?

(2) Sia A la matrice di ϕ rispetto alla base ordinata $1, x, x^2, x^3, x^4$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ in partenza e la base standard sopra in arrivo. Qual è il rango di A?

(3) Sia B la matrice di ϕ rispetto alla base ordinata $1, x+6, x^2+2x+1, x^3+5x^2-7x, x^4$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ in partenza e la base standard sopra in arrivo. Qual è il rango di B?

Soluzione

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ base "canonica" di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

(1) Determiniamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \left(\cancel{[}\phi(1)\cancel{]_{\mathcal{E}}} \,\middle|\, \phi(x) \,\middle|\, \phi(x^2) \,\middle|\, \phi(x^3) \,\middle|\, \phi(x^4) \right)$$

possiamo omettere "$[\ldots]_{\mathcal{E}}$" perché i vettori in arrivo sono già scritti in coordinate rispetto a $\mathcal{E}$

Chi è $\phi(1)$?

1 è il polinomio costante $f(x) = 1$ (corrisponde alla funzione costante "1")

$f'(x) = 0 \rightsquigarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 0 \rightsquigarrow f''(0) = 0$

$$\phi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\phi(x)$ $\boxed{f(x) = x}$ $f'(x) = 1$ $f''(x) = 0$ $\rightsquigarrow$ $f(0) = 0$ $f'(0) = 1$ $f''(0) = 0$ $\rightsquigarrow$ $\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\phi(x^2)$ $\boxed{f(x) = x^2}$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$ $\rightsquigarrow$ $f(0) = 0$ $f'(0) = 0$ $f''(0) = 2$ $\rightsquigarrow$ $\phi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Analogamente: $\phi(x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\phi(x^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$M^{e}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 PIVOT $\rightsquigarrow$ rango 3

cioè $\operatorname{im}(\phi)$ ha dimensione 3

$\operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}^3$

Nell'immagine ci sono TUTTI i vettori di $\mathbb{R}^3$, in particolare anche $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

[Nello specifico: $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\phi)\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$]

Il punto (2) adesso è gratis: abbiamo già fatto tutto prima, e ci sono 3 PIVOT

$\Rightarrow$ $rk(A)=3$.

(3) Risposta rapida: il rango non dipende dalla scelta delle basi, quindi $rk(B)=\dim(\mathrm{im}\,\phi)=3$.

Alternativamente: si calcola!

$1, \quad x+6, \quad x^2+2x+1, \quad x^3+5-7x, \quad x^4$

$\phi(x+6)=\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \phi(x^2+2x+1)=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \quad \phi(x^3+5-7x)=\begin{pmatrix}5\\-7\\0\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}1&6&1&5&0\\0&1&2&-7&0\\0&0&2&0&0\end{pmatrix}$$ ha ancora rango 3 ...

$$\begin{array}{ccccc}\uparrow&&&&\uparrow\\ \phi(1)&&&&\phi(x^4)\end{array}$$

<u>Nota.</u> La matrice $B=\begin{pmatrix}1&6&1&5&0\\0&1&2&-7&0\\0&0&2&0&0\end{pmatrix}$ è in realtà

$B=M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(\phi)$, $\quad \mathcal{B}'=\{1, x+6, x^2+2x+1, x^3-7x+5, x^4\}$

$\mathcal{E}$ è ancora la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio Data $\mathcal{e}' = \{e_2, 3e_1, -7e_3\}$, determinare

$$M^{\mathcal{e}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) \quad \text{sapendo solo chi è} \quad B = M^{\mathcal{e}}_{\mathcal{B}'}(\phi)$$

cioè senza usare ϕ

Soluzione ("a mano")

La prima colonna di B è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

Questa va scritta nella nuova base $e_2, 3e_1, -7e_3$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{a}_{=0}\, e_2 + \underbrace{b}_{b=1/3}\,(3e_1) + \underbrace{c}_{=0}\,(-7e_3)$$

La prima colonna di $M^{\mathcal{e}'}_{\mathcal{B}'}(\phi)$ sarà $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

→ Lo stesso per le altre quattro colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 6e_1 + e_2 = \overset{=1}{a}\, e_2 + \overset{=2}{b}\,(3e_1) + \overset{=0}{c}\,(-7e_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 + 2e_2 + 2e_3 = \overset{=2}{a}\, e_2 + \overset{=1/3}{b}\,(3e_1) + \overset{=-2/7}{c}\,(-7e_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5e_1 - 7e_2 = \overset{=-7}{a}\, e_2 + \overset{=5/3}{b}\,(3e_1) + \overset{=0}{c}\,(-7e_3)$$

L'ultima colonna resta il vettore nullo. In conclusione

$$M^{\mathcal{e}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 1/3 & 2 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ponga $V = \operatorname{Span}\{v_1\}$, $U = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$ e si indichino con $V^\perp$, $U^\perp$ i complementi ortogonali rispettivamente di V e U.

(1) Si trovi un vettore w in $U^\perp$ tale che $\|w\| = 1$.
(2) Si trovi una base ortonormale di $V^\perp$ che contenga il vettore w.

Soluzione

(1) $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ w è ortogonale a v_1 e v_2

$$\begin{cases} \langle w, v_1 \rangle = 0 \\ \langle w, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = y = 2x \end{cases}$$

$w = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il vettore $\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}$ è in $U^\perp$.

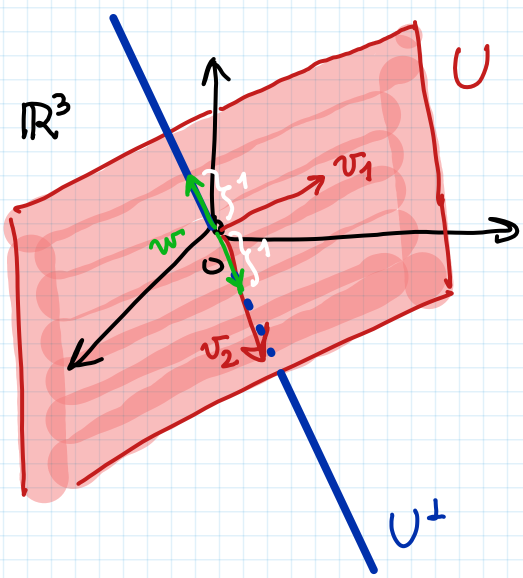
$$\|w\| = |x| \sqrt{1+4+4} = 3|x| \implies |x| = 1/3$$

$\hookrightarrow = 1$ vogliamo

$$\implies x = \pm 1/3$$

Le sole possibilità per w sono $\boxed{\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Interpretazione geometrica:



(2) Base ortonormale di $V^{\perp}$ che contiene w.

$\to \{w, u\}$

da determinare in modo che $\{w, u\}$ sia una base ortonormale di $V^{\perp}$

- $u \in V^{\perp} \xRightarrow{V = \mathrm{Span}(v_1)} \langle u, v_1 \rangle = 0$
- $\langle u, w \rangle = 0$ (questo già ci dice che w, u è una base di $V^{\perp}$) (ORTOGONALE)
- $\|u\| = 1$ (passaggio ORTOGONALE $\longrightarrow$ ORTONORMALE)

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

- $\langle u, v_1 \rangle = 2u_1 - u_2 = 0$
- $\langle u, w \rangle = \frac{1}{3}\left(u_1 + 2u_2 + 2u_3\right) = 0$
- $\|u\| = 1$ (come al solito, ce ne preoccupiamo solo alla fine)

$$\begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_3 = -\frac{1}{2}u_1 - u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 2u_1 = -\frac{5}{2}u_1. \end{cases}$$

$$\longrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \\ -\frac{5}{2}u_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ultima condizione:

$$\|u\| = \frac{1}{2}|u_1|\sqrt{4+16+25} = \frac{1}{2}|u_1|\sqrt{45} = \frac{3\sqrt{5}}{2}|u_1|$$

vogliamo $= 1$

$$\Longrightarrow \quad |u_1| = \frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

Abbiamo ancora due possibilità per u:

$$u = \frac{1}{2}u_1\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix} = \boxed{\pm\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}}.$$